

Международный математический конкурс
 «КЕНГУРУ-2003»

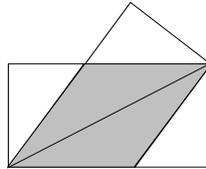


Четверг, 20 марта 2003 г.

23. Малыши **А, Б, В** и **Г** высказали следующие утверждения.

- А:** «Все – **Б, В** и **Г** – девочки»; **Б:** «Все – **А, В** и **Г** – мальчики»;
В: «**И А, и Б** лгут»; **Г:** «Все – **А, Б** и **В** – говорят правду». Сколько среди детей правдивых?
А) 0; **Б) 1;** **В) 2;** **Г) 3;** **Д) невозможно определить.**

24. Прямоугольный лист бумаги со сторонами 6 см и 12 см, перегнули по диагонали, отрезали части, которые не перекрылись, затем развернули и получили ромб (на рисунке справа). Определите длину стороны этого ромба.



- А) $3,5 \cdot \sqrt{5}$ см;** **Б) 7,35 см;** **В) 7,5 см;** **Г) 7,85 см;** **Д) 8,1 см.**

25. Сколько различных пар $(x; y)$ действительных чисел

удовлетворяют уравнению $(x + y)^2 = (x + 3)(y - 3)$?

- А) таких пар нет;** **Б) 1;** **В) 2;** **Г) 3;** **Д) бесконечно много.**

26. Найдите наибольшее количество последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не имеет сумму цифр, кратную 5?

- А) 5;** **Б) 6;** **В) 7;** **Г) 8;** **Д) 9.**

27. На книжной полке стоят 50 книг по математике и по физике. Никакие две книги по физике не стоят рядом, но у каждой книги по математике есть хотя бы одна соседняя книга по математике. Какое из следующих утверждений не обязательно является верным?

- А) Число книг по математике не меньше 32.**
Б) Число книг по физике не больше 17.
В) Имеется 3 книги по математике, которые стоят последовательно друг за другом.
Г) Если число книг по физике равно 17, то одна из них - первая или последняя на полке.
Д) Среди любых 9 последовательных книг по крайней мере 6 – по математике.

28. Сколько существует различных сумм $a + b + c$, если a, b и c – различные числа из множества $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$?

- А) 13;** **Б) 21;** **В) 22;** **Г) 30;** **Д) 120.**

29. Клетки доски 2×3 окрашены в шахматном порядке в черный и белый цвет, как на рис. 1. Определите минимальное число шагов, нужное для того, чтобы перекрасить эту доску так, как показано на рис 2. За один шаг можно перекрасить две клетки, имеющие общую сторону. При этом, черную клетку можно перекрасить только в зеленый цвет, зеленую – только в белый цвет, а белую – в черный.

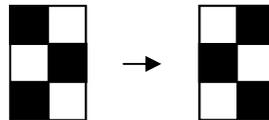


Рис.1

Рис. 2

- А) 3;** **Б) 5;** **В) 6;** **Г) 8;** **Д) 9.**

30. Запишем все натуральные не более, чем семизначные, числа, состоящие только цифр 0 и 1 (не обязательно обеих). Сколько всего цифр 1 при этом будет записано?

- А) 128;** **Б) 288;** **В) 448;** **Г) 512;** **Д) 896.**

Конкурс организован и проводится Учреждением образования «Академия последиplomного образования» и Общественным объединением «Белорусская Ассоциация «Конкурс» при содействии АСБ «Беларусбанк».

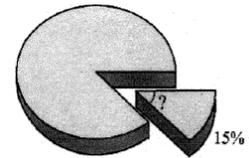
220013, г. Минск, ул. Доросевича, 3, комн. 341, РЗШ при АПО («Кенгуру»)
 Тел./факс (017) 232-80-31, 239-91-72. E-mail: kenguru_belarus@mail.ru.
 Интернет: http://bak.academy.edu.by

- продолжительность работы над заданием 1 час 15 минут;
- пользоваться калькуляторами запрещается;
- неправильный ответ оценивается четвертью баллов, предусмотренных за данный вопрос, и засчитывается со знаком «минус», в то время, как не дав ответа, участник сохраняет уже набранные баллы;
- на каждый вопрос имеется только один правильный ответ;
- самостоятельная и честная работа над заданием — главное требование организаторов к участникам конкурса;
- на старте участник получает авансом 30 баллов;
- максимальное количество баллов, которое может получить участник конкурса, — 150;
- после окончания конкурса листок с заданием остаётся у участника.

Задание для учащихся 9-10 классов.

Задачи с 1 по 10 оцениваются по 3 балла

1. От круглого пирога отрезали 15 %, проведя 2 разреза, как показано на рисунке. Сколько градусов составляет отмеченный угол?

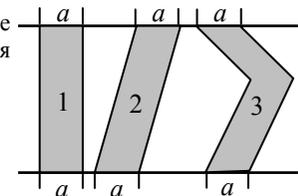


- А) 30°;** **Б) 45°;** **В) 54°;** **Г) 15°;** **Д) 45°.**

2. Диаметр круглой клумбы в нашем саду равен 1,2 м. Круглая клумба в парке имеет в 4 раза большую площадь, чем площадь нашей клумбы. Какой у нее диаметр?

- А) 2,4 м;** **Б) 3,6 м;** **В) 4,8 м;** **Г) 6,4 м;** **Д) 9,6 м.**

3. Три полоски (1, 2 и 3) на рисунке соединяют две параллельные прямые и имеют равную горизонтальную ширину a . Какая полоска имеет наибольшую площадь?



- А) все три полоски имеют равную площадь;**
Б) 1; **В) 2;** **Г) 3;**
Д) невозможно определить, не зная a .

4. Какое из следующих чисел является нечетным при любом целом n ?

- А) $2003n$;** **Б) n^2+2003 ;** **В) n^3 ;** **Г) $n+2004$;** **Д) $2n^2+2003$.**

5. В треугольнике ABC угол C в три раза больше, чем угол A , а угол B в два раза больше, чем угол A . Тогда треугольник ABC

- А) равносторонний;** **Б) равнобедренный;** **В) тупоугольный;**
Г) прямоугольный; **Д) остроугольный.**

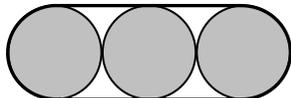
6. Трио певцов исполняет музыкальное произведение. Партия каждого певца состоит из четырех равных по времени звучания частей. Каждая часть состоит из 3 музыкальных фрагментов равной продолжительности. Каждый певец исполняет свою партию без перерывов, и каждая партия звучит одно и то же время. Второй певец начинает свою партию тогда, когда первый певец начинает второй фрагмент первой части, а еще через один фрагмент к ним присоединяется третий певец. Какую часть от времени звучания всего произведения составляет время, в течение которого все три певца поют вместе?

- А) 3/5; Б) 4/5; В) 4/7; Г) 5/7; Д) 7/11.

7. Число $a = 111\dots 1$ состоит из 2003 цифр 1. Найдите сумму цифр числа, равного $2003a$.

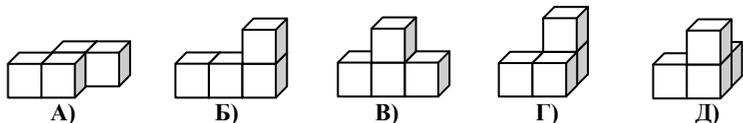
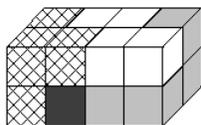
- А) 1000; Б) 10015; В) 10020; Г) 10030; Д) 2003^2 .

8. Центры трех равных кругов, площадь каждого из которых равна a , зафиксированы на одной прямой. Средний круг касается двух других. Площадь квадрата, описанного около данного круга, равна b . Круги охватывает (без провисания) эластичная нить. Тогда площадь фигуры, ограниченной этой нитью, равна



- А) $3b$; Б) $2a+b$; В) $a+2b$; Г) $3a$; Д) $a+b$.

9. Федя сложил прямоугольный параллелепипед (см. рис. справа) из четырех фигурок, каждая из которых состоит из четырех равных кубиков. Три использованные фигурки полностью видны на рисунке справа. Определите черную фигурку (у которой видна грань лишь одного кубика).

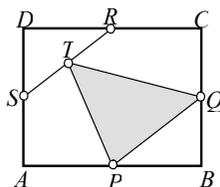


10. Кенгуру прыгает от дома к пастбищу со скоростью 5 м/сек, а обратно – со скоростью 4 м/сек. На дорогу туда и обратно у него уходит 15 мин. Определите длину пути от дома до пастбища.

- А) 4,05 км; Б) 8,1 км; В) 0,9 км; Г) 2 км; Д) невозможно определить.

Задачи с 11 по 20 оцениваются по 4 балла

11. В прямоугольнике $ABCD$ точки P, Q, R и S являются серединами сторон AB, BC, CD и AD , соответственно, а T – середина отрезка RS . Какую часть от площади прямоугольника $ABCD$ составляет площадь треугольника TQP ?



- А) 5/16; Б) 1/4; В) 1/5; Г) 1/6; Д) 3/8.

12. В примере на сложение цифры заменили буквами (одинаковые цифры – одинаковыми буквами; разные – различными). Какую цифру заменили буквой X?

- А) 1; Б) 2;
В) 7; Г) 8;
Д) 9.

$$\begin{array}{r} X X \\ + Y Y \\ + Z Z \\ \hline Z Y X \end{array}$$

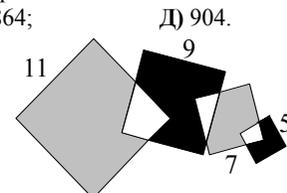
13. Когда бочка на 30 % пуста, то в ней содержится на 30 литров больше, чем когда она на 30% заполнена. Сколько литров вмещает полная бочка?

- А) 60; Б) 75; В) 90; Г) 100; Д) 120.

14. Аня и Вера каждая на своем листке записали число 888 (оно, очевидно, делится на 8). Затем Аня заменила в своем числе две цифры на какие-то две другие (не обязательно, равные) так, что получилось максимально возможное число, которое по-прежнему делится на 8. Вера также заменила в своем числе две цифры на две другие (не обязательно, равные) так, что получилось наименьшее возможное трехзначное число (первая цифра – не 0), которое по-прежнему делится на 8. Какова разность между числами Ани и Веры?

- А) 800; Б) 840; В) 856; Г) 864; Д) 904.

15. Найдите разность между суммой площадей серой и суммой площадей черной частей квадратов на рисунке. (Число, записанное рядом со стороной квадрата, равно ее длине.)

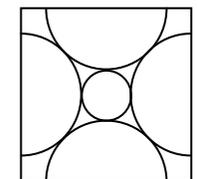


- А) 25; Б) 36; В) 49; Г) 64; Д) 0.

16. Значение выражения $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2003}\right)$ равно

- А) 2004; Б) 2003; В) 2002; Г) 1002; Д) 1001.

17. На рисунке справа показаны четыре полукруга радиуса 1. Их центры являются серединами сторон квадрата. Найдите радиус расположенного внутри квадрата круга, который касается всех четырех полукругов.

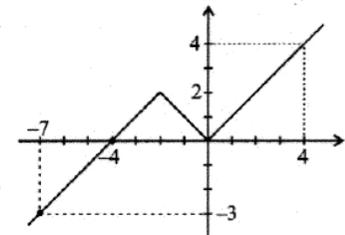


- А) $\sqrt{2} - 1$; Б) $(\pi/2) - 1$; В) $\sqrt{3} - 1$; Г) $\sqrt{5} - 2$; Д) $\sqrt{7} - 2$.

18. Рассмотрим число 2003 и все различные четырехзначные числа, которые можно составить, переставляя цифры числа 2003. (Число не может начинаться цифрой 0.) Сумма этих чисел равна

- А) 5005; Б) 5555; В) 16665; Г) 11110; Д) 15555.

19. Последовательность (a_n) , $n = 1, 2, \dots$, задана следующим образом: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_k = a_{k-2} : a_{k-1}$ при всех $k \geq 3$. Найдите десятый член последовательности.



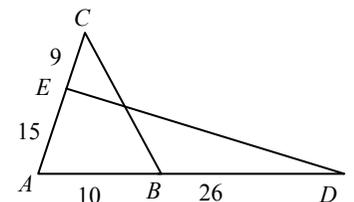
- А) 2^{-10} ; Б) 2^{-21} ; В) 2^{13} ; Г) 1024; Д) 2^{34} .

20. График функции $f(x)$ состоит из двух лучей и одного отрезка (см. рис.). Найдите множество решений уравнения $f(f(f(x))) = 0$.

- А) $\{-4, 0\}$; Б) $\{-8, -4, 0\}$; В) \emptyset ; Г) $\{-12, -8, -4, 0\}$; Д) $\{-16, -12, -8, -4, 0\}$.

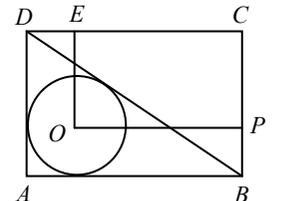
Задачи с 21 по 30 оцениваются по 5 баллов

21. Найдите отношение площади треугольника ADE к площади треугольника ABC (см. рис. справа).



- А) 9/4; Б) 7/3; В) 4/5; Г) 16/9; Д) 25/16.

22. Площадь прямоугольника $ABCD$ на рисунке равна 36 см^2 . Окружность с центром O вписана в треугольник ABD . Определите площадь прямоугольника $OPCE$.



- А) 24 см^2 ; Б) $6\pi \text{ см}^2$; В) 18 см^2 ; Г) $12\sqrt{2} \text{ см}^2$;
Д) для этого необходимо знать отношение AB к AD .